Ensino Fundamental: Equações do primeiro grau	
▪ Equações 1o.grau: Introdução ▪ Equações 1o.grau: 1 variável ▪ Desigualdades 1o.grau: 1 var. ▪ Desigualdades 1o.grau: 2 var.	▪ Sistemas de equações: 1o.grau ▪ O Método de substituição ▪ Relação entre retas e sistemas ▪ Desigualdades com 2 equações

Introdução às equações de primeiro grau

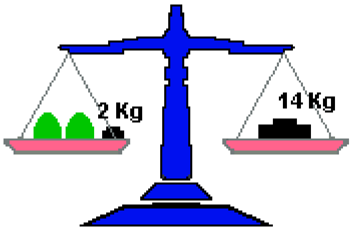
Para resolver um problema matemático, quase sempre devemos transformar uma sentença apresentada com palavras em uma sentença que esteja escrita em linguagem matemática. Esta é a parte mais importante e talvez seja a mais difícil da Matemática.

Sentença com palavras	Sentença matemática
2 melancias + 2Kg = 14Kg	2 x + 2 = 14

Normalmente aparecem letras conhecidas como variáveis ou incógnitas. A partir daqui, a Matemática se posiciona perante diferentes situações e será necessário conhecer o valor de algo desconhecido, que é o objetivo do estudo de equações.

Equações do primeiro grau em 1 variável

Trabalharemos com uma situação real e dela tiraremos algumas informações importantes. Observe a balança:



A balança está equilibrada. No prato esquerdo há um "peso" de 2Kg e duas melancias com "pesos" iguais. No prato direito há um "peso" de 14Kg. Quanto pesa cada melancia?

2 melancias + 2Kg = 14Kg

Usaremos uma letra qualquer, por exemplo x, para simbolizar o peso de cada melancia. Assim, a equação poderá ser escrita, do ponto de vista matemático, como:

$$2x + 2 = 14$$

Este é um exemplo simples de uma equação contendo uma variável, mas que é extremamente útil e aparece na maioria das situações reais. Valorize este exemplo simples.

Podemos ver que toda equação tem:

- Uma ou mais letras indicando valores desconhecidos, que são denominadas variáveis ou incognitas;
- Um sinal de igualdade, denotado por =.
- Uma expressão à esquerda da igualdade, denominada primeiro membro ou membro da esquerda;
- Uma expressão à direita da igualdade, denominada segundo membro ou membro da direita.

No link Expressões Algébricas, estudamos várias situações contendo variáveis. A letra x é a incógnita da equação. A palavra *incógnita* significa *desconhecida* e equação tem o prefixo *equa* que provém do Latim e significa *igual*.

2 x + 2	=	14
1o. membro	sinal de igualdade	2o. membro

As expressões do primeiro e segundo membro da equação são os *termos* da equação.

Para resolver essa equação, utilizamos o seguinte processo para obter o valor de x.

2x + 2 = 14	**Equação original**
2x + 2 - 2 = 14 - 2	**Subtraímos 2 dos dois membros**
2x = 12	**Dividimos por 2 os dois membros**
x = 6	**Solução**

Observação: Quando adicionamos (ou subtraímos) valores iguais em ambos os membros da equação, ela permanece em equilíbrio. Da mesma forma, se multiplicamos ou dividimos ambos os membros da equação por um valor não nulo, a equação permanece em equilíbrio. Este processo nos permite resolver uma equação, ou seja, permite obter as raízes da equação.

Exemplos:

1. A soma das idades de André e Carlos é 22 anos. Descubra as idades de cada um deles, sabendo-se que André é 4 anos mais novo do que Carlos.
   Solução: Primeiro passamos o problema para a linguagem matemática. Vamos tomar a letra c para a idade de Carlos e a letra a para a idade de André, logo a=c-4. Assim:
   c + a = 22
   c + (c - 4) = 22
   2c - 4 = 22
   2c - 4 + 4 = 22 + 4
   2c = 26
   c = 13
   Resposta: Carlos tem 13 anos e André tem 13-4=9 anos.
2. A população de uma cidade A é o triplo da população da cidade B. Se as duas cidades juntas têm uma população de 100.000 habitantes, quantos habitantes tem a cidade B?
   Solução: Identificaremos a população da cidade A com a letra a e a população da cidade com a letra b. Assumiremos que a=3b. Dessa forma, poderemos escrever:
   a + b = 100.000
   3b + b = 100.000
   4b = 100.000
   b = 25.000
   Resposta: Como a=3b, então a população de A corresponde a: a=3×25.000=75.000 habitantes.
3. Uma casa com 260m² de área construída possui 3 quartos de mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam 140m²?
   Solução: Tomaremos a área de cada dormitório com letra x.
   3x + 140 = 260
   3x = 260 -140
   3x = 120
   x = 40
   Resposta: Cada quarto tem 40m².

Exercícios: Resolver as equações

1. 2x + 4 = 10
2. 5k - 12 = 20
3. 2y + 15 - y = 22
4. 9h - 2 = 16 + 2h

Desigualdades do primeiro grau em 1 variável

Relacionadas com as equações de primeiro grau, existem as desigualdades de primeiro grau, (também denominadas inequações) que são expressões matemáticas em que os termos estão ligados por um dos quatro sinais:

<	menor
>	maior
≤	menor ou igual
≥	maior ou igual

Nas desigualdades, o objetivo é obter um conjunto de todas os possíveis valores que pode(m) assumir uma ou mais incógnitas na equação proposta.

Exemplo: Determinar todos os números **inteiros** positivos para os quais vale a desigualdade:

$2x + 2 < 14$

Para resolver esta desigualdade, seguiremos os seguintes passos:

Passo 1	$2x + 2 < 14$	**Escrever a equação original**

Passo 2	2x + 2 - 2 < 14 - 2	**Subtrair o número 2 dos dois membros**
Passo 3	2x < 12	**Dividir pelo número 2 ambos os membros**
Passo 4	x < 6	**Solução**

Concluímos que o conjunto solução é formado por todos os números inteiros positivos menores do que 6:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Exemplo: Para obter todos os números pares positivos que satisfazem à desigualdade

$$2x + 2 < 14$$

obteremos o conjunto solução:

$$S = \{2, 4\}$$

Observação: Se há mais do que um sinal de desigualdade na expressão, temos várias desigualdades "disfarçadas" em uma.

Exemplo: Para determinar todos os números inteiros positivos para os quais valem as (duas) desigualdades:

$$12 < 2x + 2 \leq 20$$

poderemos seguir o seguinte processo:

12	<	2x + 2	≤	20	**Equação original**
12 - 2	<	2x + 2 - 2	≤	20 - 2	**Subtraímos 2 de todos os membros**
10	<	2x	≤	18	**Dividimos por 2 todos os membros**
5	<	x	≤	**9**	**Solução**

O conjunto solução é:

$$S = \{6, 7, 8, 9\}$$

Exemplo: Para obter todos os números inteiros negativos que satisfazem às (duas) desigualdades

$$12 < 2x + 2 < 20$$

obteremos apenas o conjunto vazio, como solução, isto é:

$$S = \emptyset = \{ \}$$

Desigualdades do primeiro grau em 2 variáveis

Uma situação comum em aplicações é aquela em que temos uma desigualdade envolvendo uma equação com 2 ou mais incógnitas. Estudaremos aqui apenas o caso em aparecem 2 incógnitas x e y. Uma forma geral típica, pode ser:

$$a\,x + b\,y < c$$

onde a, b e c são valores dados.

Exemplo: Para obter todos os pares ordenados de números reais para os quais:

$$2x + 3y \geq 0$$

observamos que o conjunto solução contém os pares:

$$(0,0), (1,0), (0,1), (-1,1), (1,-1), \ldots$$

Há infinitos pares ordenados de números reais satisfazendo a esta desigualdade, o que torna impossível exibir todas as soluções. Para remediar isto, utilizaremos um processo geométrico que permitirá obter uma solução geométrica satisfatória.

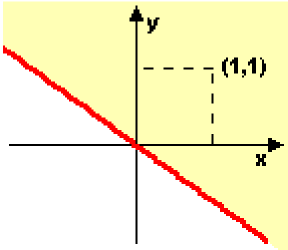
Processo geométrico:

(1) Traçamos a reta 2x+3y=0;

(2) Escolhemos um par ordenado, como (1,1), fora da reta;

(3) Se (1,1) satisfaz à desigualdade 2x+3y≥0, colorimos a região que contém este ponto, caso contrário, colorimos a região que está do outro lado da reta.

(4) A região colorida é o conjunto solução para a desigualdade.



Sistemas linear de equações do primeiro grau

Uma equação do primeiro grau, é aquela em que todas as incógnitas estão elevadas à potência 1. Este tipo de equação poderá ter mais do que uma incógnita.
Um sistema de equações do primeiro grau em duas incógnitas x e y, é um conjunto formado por duas equações do primeiro nessas duas incógnitas.
Exemplo: Seja o sistema de duas equações:

$$2x + 3y = 38$$
$$3x - 2y = 18$$

Resolver este sistema de equações é o mesmo que obter os valores de x e de y que satisfazem simultaneamente a ambas as equações.
x=10 e y=6 são as soluções deste sistema e denotamos esta resposta como um par ordenado de números reais:

$$S = \{ (10,6) \}$$

Método de substituição para resolver este sistema

Entre muitos outros, o *método da substituição*, consiste na idéia básica de isolar o valor algébrico de uma das variáveis, por exemplo x, e, aplicar o resultado à outra equação.
Para entender o método, consideremos o sistema:

$$2x + 3y = 38$$
$$3x - 2y = 18$$

Para extrair o valor de x na primeira equação, usaremos o seguinte processo:

2x + 3y = 38	**Primeira equação**
2x + 3y - 3y = 38 - 3y	**Subtraímos 3y de ambos os membros**
2x = 38 - 3y	**Dividimos ambos os membros por 2**
x = 19 - (3y/2)	**Este é o valor de x em função de y**

Substituímos aqora o valor de x na segunda equação 3x-2y=18:

3x - 2y = 18	**Segunda equação**
3(19 - (3y/2)) - 2y = 18	**Após substituir x, eliminamos os parênteses**
57 - 9y/2 - 2y = 18	**multiplicamos os termos por 2**
114 - 9y - 4y = 36	**reduzimos os termos semelhantes**
114 - 13y = 36	**separamos variáveis e números**
114 - 36 = 13y	**simplificamos a equação**
78 = 13y	**mudamos a posição dos dois membros**
13 y = 78	**dividimos ambos os membros por 6**
y = 6	**Valor obtido para y**

Substituindo y=6 na equação x=19-(3y/2), obtemos:

$$x = 19 - (3\times 6/2) = 19 - 18/2 = 19-9 = 10$$

Exercício: Determinar a solução do sistema:

$$x + y = 2$$
$$x - y = 0$$

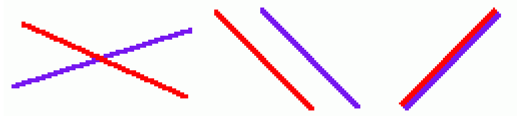
Cada equação do sistema acima pode ser visto como reta no plano cartesiano. Construa as duas retas no plano e verifique que, neste caso, a solução é um par ordenado que pertence à interseção das duas retas.

Relação entre sistemas lineares e retas no plano

No contexto que estamos trabalhando aqui, cada equação da forma ax+by=c, representa uma reta no plano cartesiano. Um sistema com duas equações de primeiro grau em 2 incógnitas sempre pode ser interpretado como um conjunto de duas retas localizadas no plano cartesiano.

Reta 1: $ax + by = c$
Reta 2: $dx + ey = f$

Há três modos de construir retas no plano: retas concorrentes, retas paralelas e retas coincidentes.



Se o sistema é formado por duas equações que são retas no plano cartesiano, temos a ocorrência de:

Retas concorrentes: quando o sistema admite uma única solução que é um par ordenado localizado na interseção das duas retas;

Retas paralelas: quando o não admite solução, pois um ponto não pode estar localizado em duas retas paralelas;

Retas coincidentes: quando o admite uma infinidade de soluções pois as retas estão sobrepostas.

Exemplos das três situações

Tipos de retas	Sistema
Concorrentes	$x + y = 2$ $x - y = 0$
Paralelas	$x + y = 2$ $x + y = 4$
Coincidentes	$x + y = 2$ $2x + 2y = 4$

Problemas com sistemas de equações:

1. A soma das idades de André e Carlos é 22 anos. Descubra as idades de cada um deles, sabendo-se que André é 4 anos mais novo do que Carlos.
   Solução: A idade de André será tomada com a letra A e a idade de Carlos com a letra C. O sistema de equações será:
   C + A = 22
   C - A = 4
   Resposta: C = 13 e A = 9
2. A população de uma cidade A é o triplo da população da cidade B. Se as duas cidades juntas têm uma população de 100.000 habitantes, quantos habitantes tem a cidade B?
   Solucão: Identificando a população da cidade A com a letra A e a população da cidade B com B, o sistema de equações será:
   A + B = 100000
   A = 3B
   Resposta: A = 75000, B= 25000.
3. Uma casa com 260m² de área construída tem 3 dormitórios de mesmo tamanho. Qual é a área de cada dormitório se as outras dependências da casa ocupam 140m²?
   Solução: Identificaremos a área de cada dormitório com a letra D e a área das outras dependências com a letra O. Assim, o sistema será:
   3D + O = 260
   O = 140
   Resposta: D = 40

Desigualdades com 2 Equações em 2 variáveis

Outra situação bastante comum é aquela em que existe uma desigualdade com 2 equações em 2 ou mais incógnitas. Estudaremos aqui apenas o caso em aparecem 2 equações e 2 incógnitas x e y. Uma forma geral pode ter a seguinte forma típica:

$$a\,x + b\,y < c$$
$$d\,x + e\,y \geq f$$

onde as constantes: a, b, c, d, e, f; são conhecidas.

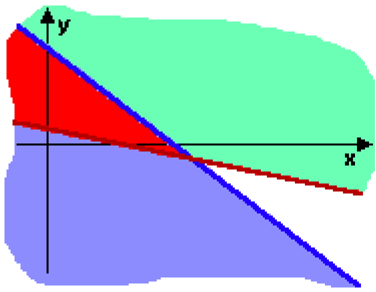
Exemplo: Determinar todos os pares ordenados de números reais para os quais:

$$2x + 3y > 6$$
$$5x + 2y \leq 20$$

Há infinitos pares ordenados de números reais satisfazendo a esta desigualdade, o que torna impossível exibir todas as soluções. Para remediar isto, utilizaremos um processo geométrico que permitirá obter uma solução geométrica satisfatória.

Processo geométrico:

(1) Traçar a reta 2x+3y=6 (em vermelho);
(2) Escolher um ponto fora da reta, como o par (2,2) e observar que ele satisfaz à primeira desigualdade;
(3) Devemos colorir o semi-plano contendo o ponto (2,2) (em verde);
(4) Traçar a reta 5x+2y=20 (em azul);
(5) Escolher um ponto fora da reta, por exemplo, o próprio par já usado antes (2,2) (não é necessário que seja o mesmo) e observamos que ele satisfaz à segunda desigualdade;
(6) Colorir o semi-plano contendo o ponto (2,2), inclusive a própria reta. (cor azul)
(7) Construir a interseção (em vermelho) das duas regiões coloridas.
(8) Esta interseção é o conjunto solução para o sistema com as duas desigualdades.



Esta situação gráfica é bastante utilizada em aplicações da Matemática a estudos de Economia e Processos de otimização. Um dos ramos da Matemática que estuda este assunto é a Pesquisa Operacional.

Construída por Ulysses Sodré. Atualizada em 24/mar/2005.
